教育数学指导下的高等代数教学研究

王卿文
上海大学数学系

福建省高等代数与线性代数

课程建设第21次研讨会

华侨大学 · 2019年11月17日

报告提纲

1 关于教育数学

2 矩阵秩的诠释

3 线性方程组的新解法

4 矩阵对角化系列知识的产生过程

5 线性变换存在定理的发现

什么是教育数学

数学：

纯粹数学

应用数学

教育数学

教育数学：

人的数学

传承数学

童增祥教授

美籍华人数学家

Otterbein University

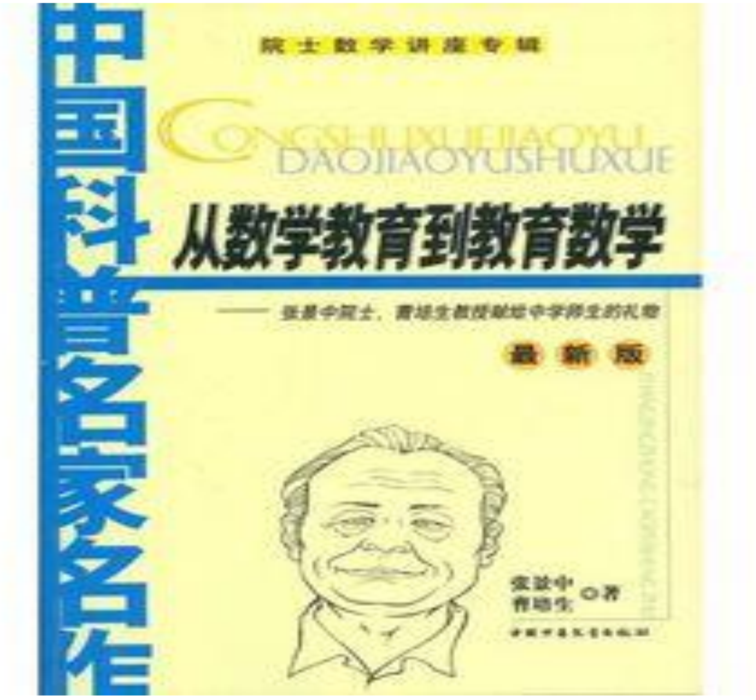
什么是教育数学

- **数学教育**：
  研究数学教材与教法，关注怎么教，不涉及数学创新

- 教育数学：
  改造数学的研究成果使之更适宜于教和学

- 教育数学目标：
  把数学变得更容易

- 教育数学是介于数学和教育学之间、以数学为主的新兴交叉学科



什么是教育数学

2004年5月15日学会在广州大学创立.

教育部和民政部正式批准、隶属于

中国高等教育学会的二级学会.

中国高等教育学会

教育数学专业委员会

http://em.shu.edu.cn

教育数学创始人
第一届理事长
张景中院士

第二届、第三届理事长

李尚志教授

现任理事长

王卿文教授

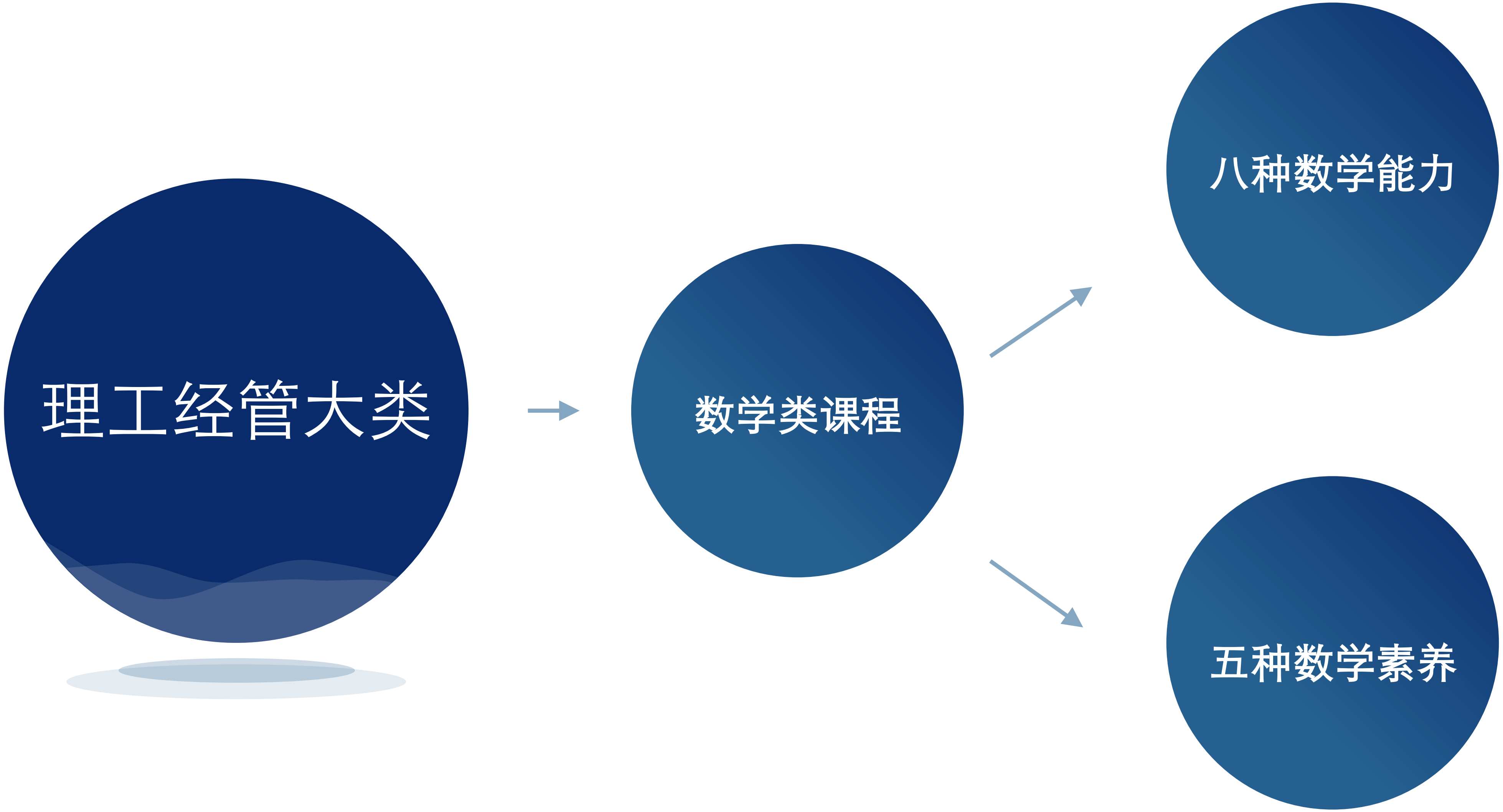
教育数学新视角

科学技术迅猛巨变，大学数学教育面临许多新问题.

教育数学的核心思想可为大学数学教学新的发展提供启发和指导

- 教育数学不仅需要让数学变得简单，还要让数学更加有用，让数学为人们提供观察世界方法和解决问题的手段
- 教育数学还应当为研究导向教学提供理论和方法. 用研究的态度和方法开展教学
- 降低数学研究的门槛，为落实创新能力的培养提供方法

教学的根本任务—培养学生的**创新精神**和**创新能力**



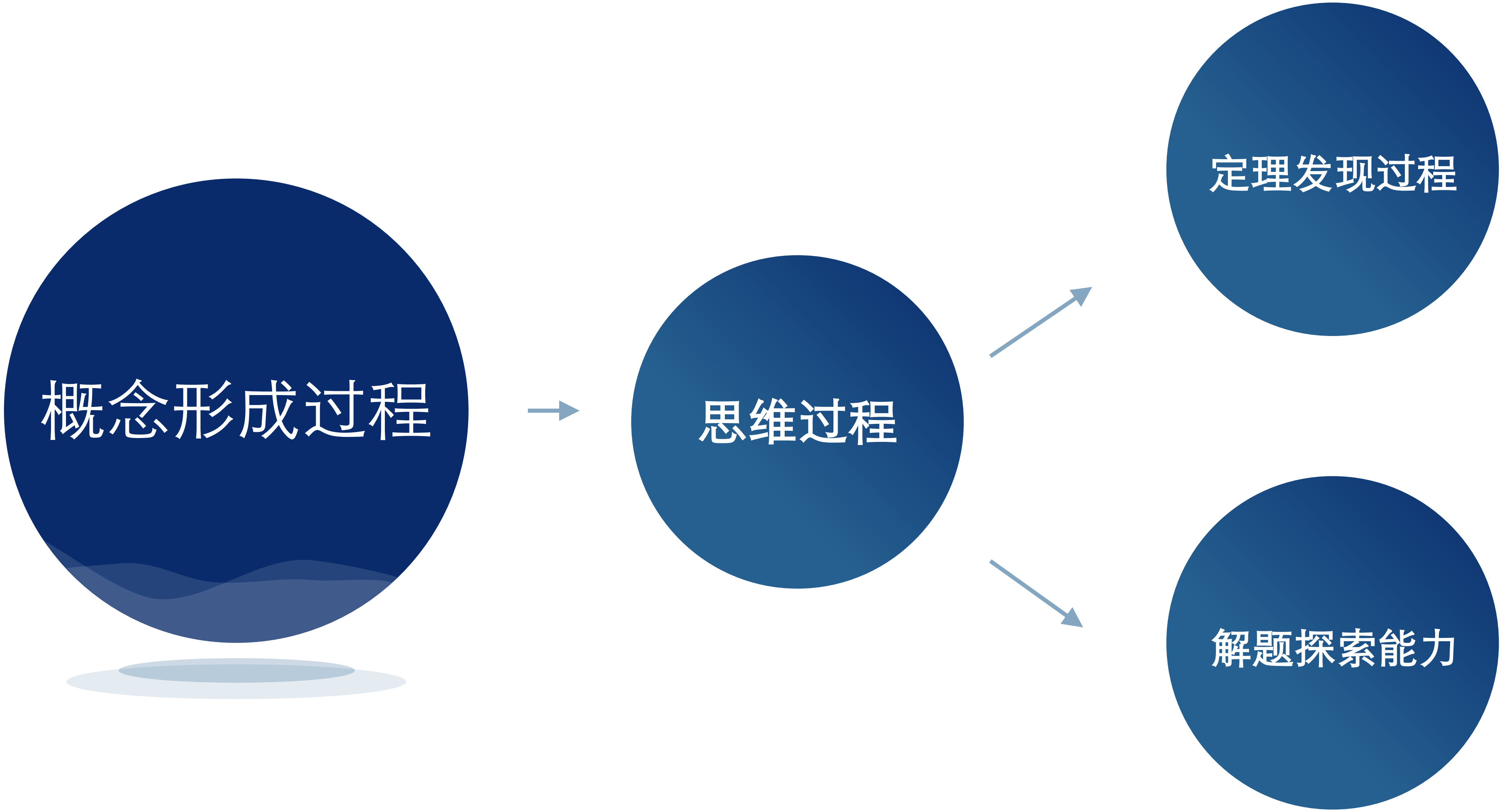
八种数学能力

1. 分析能力
2. 归纳能力
3. 抽象能力
4. 空间想象能力
5. 演绎推理能力
6. 准确计算能力
7. 运用数学软件能力
8. 学习新数学知识能力

五种数学素养

1. 主动寻求并善于抓住数学问题的背景和本质
2. 具有良好的科学态度和创新精神
3. 合理地提出新思想、新概念、新方法
4. 以“数学方式”的理性思维，从多角度探寻解决问题的方法
5. 善于对现实世界中的现象和过程进行合理简化和量化，建立数学模型

“概念—定理—范例”—教科书

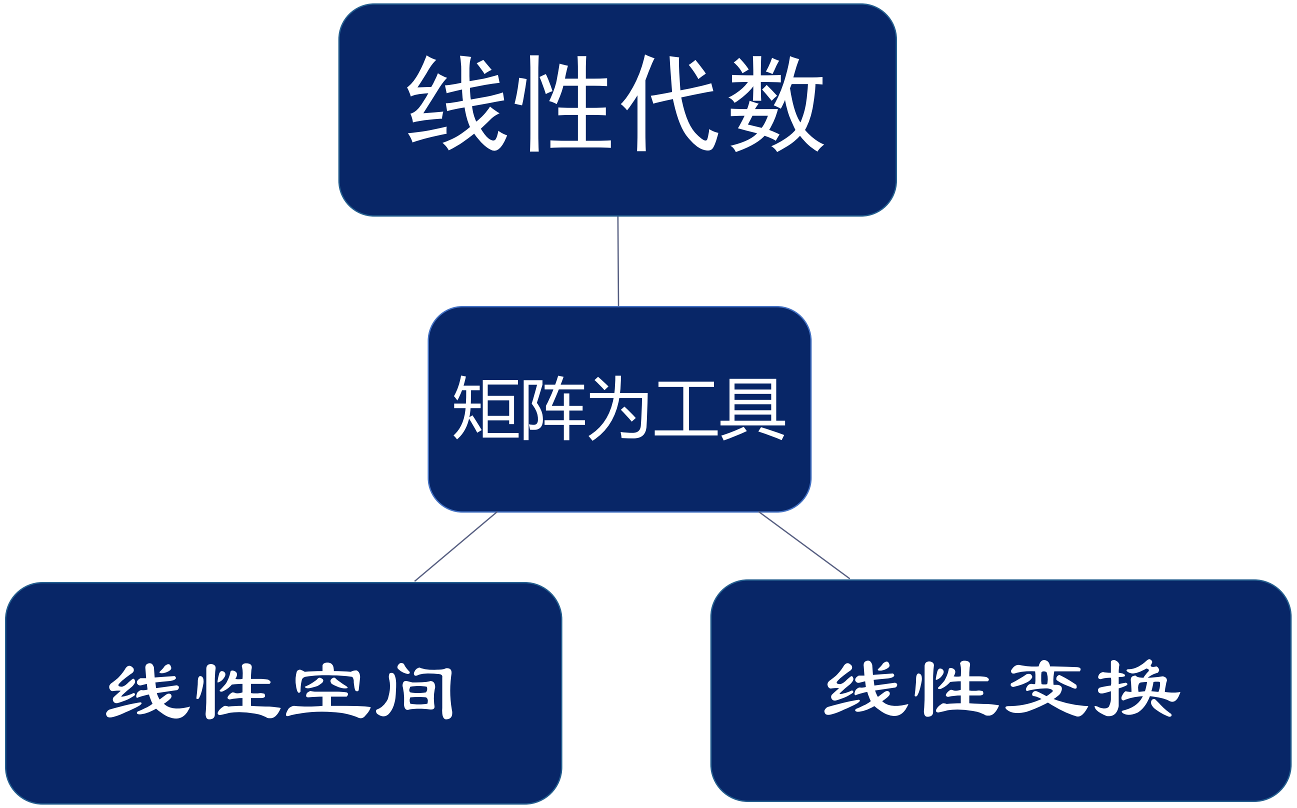


教学高境界—引导学生脑洞大开

概念形成过程

定理发现过程

线性代数的本质



矩阵秩的诠释

01

PART ONE

矩阵秩定义的诠释

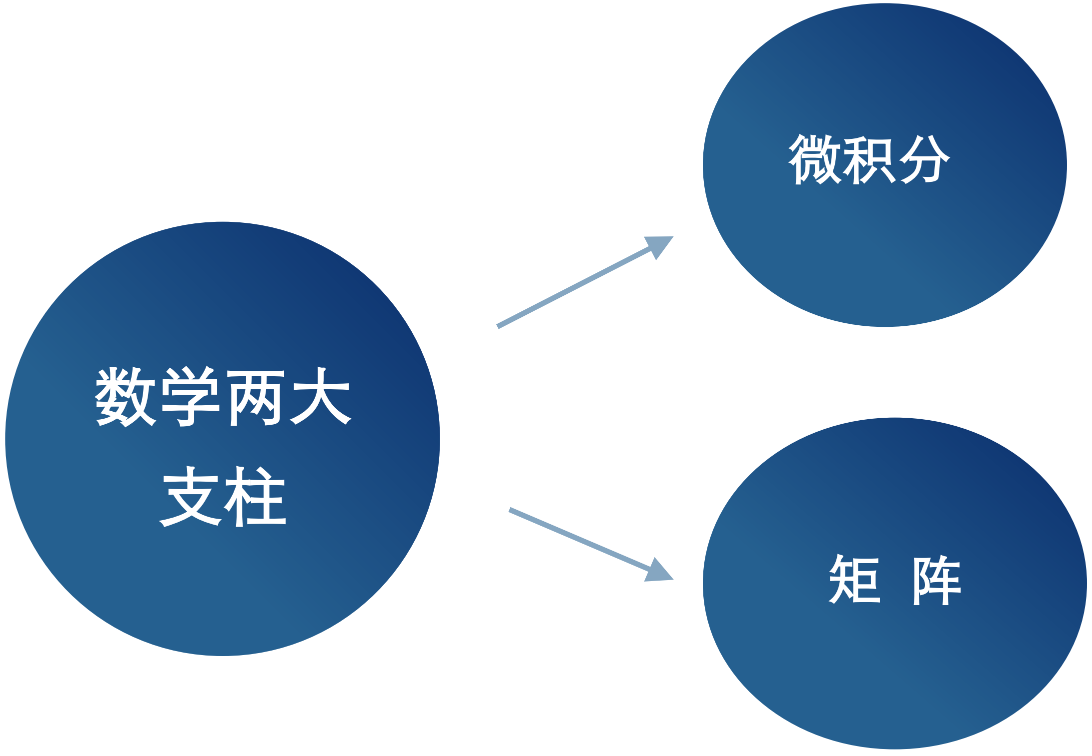
秩（rank）

排名，等级，数字有大小，有顺序，

矩阵有顺序吗？

科学的宗旨

复杂 ⟶ 简单



用初等变换简化矩阵

$$A \to \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

上面1的个数 r 是唯一的

矩阵的相抵标准型

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ 0 \le r \le \min\{m, \ n\}$$

r 是A的一个固定不变量

A的相抵标准型中的r取名为矩阵的秩记为 $r(A)=r$

n阶可逆矩阵的秩是n.

基础解系新求法及非齐次线性方程组新解法发现过程

02

PART TWO

齐次线性方程组基础解系的简便求法

$$X_{1\times n}A_{n\times m} = 0_{1\times m} \qquad (2.1)$$

$$\left[A_{n\times m}, I_n\right] \xrightarrow{row} \left(\begin{pmatrix} D_r \\ 0 \end{pmatrix}, \ P \right)$$

矩阵P 后n-r行是（2.1）的一基础解系

例子

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}.$$

将方程组转换为（2.1）的形式

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 8 & -9 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 7 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \cdots$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\dfrac{3}{2} & \dfrac{7}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 = (-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}, 1, 0)\text{，}\quad \alpha_2 = (-1, -2, 0, 1)$$

为所求的一个基础解系.

可逆矩阵求法的启发

可逆矩阵的相抵标准形是单位阵

$$\left[A_{n\times n}, I_n\right] \xrightarrow{row} \left[I_n, P\right]$$

$$P = A^{-1}$$

基础解系新求法发现过程

矩阵A 不可逆时，其标准形为

$$PA_{n\times m}Q=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$PA_{n\times m}=\begin{pmatrix} D_r \\ 0 \end{pmatrix},\ r(D_r)=r$$

基础解系新求法发现过程

仿效求可逆矩阵的逆矩阵之方法

$$\left[A_{n\times m}, I_n\right] \xrightarrow{row} \left(\begin{pmatrix} D_r \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P\right)$$

$$PA_{n\times m} = \begin{pmatrix} D_r \\ 0 \end{pmatrix}$$

基础解系新求法发现过程

考察矩阵P 后n-r行

(1) P的后n-r 行表成 $\begin{bmatrix}0, I_{n-r}\end{bmatrix} P$

(2) P可逆，其后n-r 行线性无关

齐次线性方程组基础解系的简便求法

(3) *P* 的后 *n-r* 行均是齐次线性方程组的解?

$$X_{1\times n}A_{n\times m}=0_{1\times m} \qquad (2.1)$$

齐次线性方程组基础解系的简便求法

回答是肯定的！

即P的后n-r行均是（2.1）的解. 事实上，

$$[0, I_{n-r}]PA = [0, I_{n-r}]\begin{pmatrix} D_r \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

齐次线性方程组基础解系的简便求法

(4) P 的后 n-r 行可表示(2.1) 的任意解?

齐次线性方程组基础解系的简便求法

P的后n-r 行可表示(2.1)的任意解，事实上，

令 x_0 是(2.1)的任意解,则有

$$x_0 P^{-1} PAQ = 0.$$

$$x_0 P^{-1} := (y_1, y_2)$$

$$(y_1, y_2)\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$y_1 = 0, \quad x_0 = (0, y_2)P = y_2(0, I_{n-r})P$$

矩阵 P 后n-r行是(2.1）的一个基础解系

齐次线性方程组基础解系的简便求法

$$X_{1\times n}A_{n\times m}=0_{1\times m} \qquad (2.1)$$

$$\left[A_{n\times m}, I_n\right] \xrightarrow{row} \left(\begin{pmatrix} D_r \\ 0 \end{pmatrix}, \ P\right)$$

矩阵P 后n-r行是(2. 1）的一基础解系

非齐次线性方程组的简便求法

考虑非齐次线性方程组 $X_{1\times n}A_{n\times m} = b_{1\times m}$ .... (1)

$$x = (x_1, \cdots, x_n), \quad A = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

(1）有解当且仅当b可由A的n个行向量线性表示，即

$$x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n = b$$

$$\Updownarrow$$

$$r\begin{bmatrix} A \\ b \end{bmatrix} = r(A).$$

非齐次线性方程组的简便求法

$X_{1\times n}A_{n\times m}=b_{1\times m}$ (1) 与 $X_{1\times n}A_{n\times m}=0$ (2) 的关系：

（1）的任意两个解的差是（2）的解； （1）的通解可表示为（1）的特解与（2）的任意解的和

判断(1) 是否有解，只须验证

$$r(A)=r\begin{pmatrix}A\\b\end{pmatrix}?$$

求（1）的通解，只须求出其一个特解和其导出组(2)的一个基础解系

非齐次线性方程组的简便求法

$$X_{1\times n}A_{n\times m}=b_{1\times m} \quad (1) \quad 令$$

$$C=\begin{pmatrix} A & I_n \\ -b & 0 \end{pmatrix},$$

则：1) 总可对C经过一系列初等行变换(最后一行只能作前面行的倍数加到该行上的变换），化为

$$G=\begin{pmatrix} D_{rm} & M_{rn} \\ 0 & N_{(n-r)n} \\ E_{1m} & U_{1n} \end{pmatrix}.$$

其中 $D\in F_r^{r\times m}, E_{1m}=0$ 或 $r\begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix}=r+1.$

非齐次线性方程组的简便求法

2) 方程组(1)有解当且仅当 $E_{1m} = 0.$

3) G 中的 N 的各行为(1)的导出组的基础解系；(1)有解时，U 为(1)的一个特解.

4) 方程组(1)有解时，其通解为 $X = U_{1n} + HN$ 其中 $H \in F^{1\times(n-r)}$ 任意.

推论 若(1)有解，则
(a) $r(A) = n$， 有唯一解；
(b) $r(A) < n$， 有无穷多解.

非齐次线性方程组的简便求法

例 解线性方程组

解

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 1. \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 3 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 5 \\ 4 & 6 & -2 \\ -3 & -4 & 3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

非齐次线性方程组的简便求法

则 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -18 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 15 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\to \left(\begin{array}{ccc:cccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 8 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 5 & 0 & 1 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

非齐次线性方程组的简便求法

可得

$$E=(0,0,0),U=(2,-1,0,0),$$
$$\eta_1=(8,-6,1,0),\eta_2=(-7,5,0,1).$$

故题设方程组有解，且一般解为

$$X=U+k_1\eta_1+k_2\eta_2,$$

k_1,k_2为任意数.

矩阵对角化系列知识产生过程

03

PART THREE

矩阵对角化系列知识产生过程

$$A \to P^{-1}AP$$ 相似变换

$$A \to P'AP$$ 相合变换

如何用相似变换和相合变换将方阵A化为对角形？

矩阵对角化系列知识产生过程

矩阵A对角化：找可逆阵P使得

$$AP = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

矩阵对角化系列知识产生过程

$$P := (\alpha_1, \quad \cdots, \quad \alpha_n)$$

$$AP = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

矩阵对角化变为找 α_i, λ_i

$$A\alpha_i = \lambda_i \alpha_i, i = 1, \cdots, n$$

矩阵对角化系列知识产生过程

矩阵的特征向量与特征值

$$A\alpha = \lambda\alpha$$

求特征向量系就是求 $(\lambda I - A)x = 0$

基础解系；求特征值就是解方程 $|\lambda I - A| = 0$

特征多项式，特征方程，对角化的充要条件

矩阵对角化系列知识产生过程

矩阵不能对角化时怎么办？

除了对角阵外，准对角阵简单！

如何用相似变换将方阵A化为准对角形？

矩阵对角化系列知识产生过程

相似变换将复方阵A化为准对角形？

↓

Jordan 标准形式

矩阵对角化系列知识产生过程

如果能找可逆阵P使得

$$P'AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

即矩阵A相合于一对角阵，则A定为对称矩阵. 因此，相合变换仅对对称矩阵而言。

矩阵对角化系列知识产生过程

实对称阵A一定可与对角阵相合

$$P'AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

上述对角元全正时，A可与单位阵相合，这样就产生了正定矩阵等系列问题；当相合变换与相似变换一样时，上述的P的转置与逆阵相同，即正交相抵变换即正交相似变换；实对称阵必正交合同与对角阵。

线性变换存在定理的发现

04

PART Four

线性变换存在定理的发现

线性变换存在唯一性定理：

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是线性空间V的一个基，

$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 是V的一组向量，则存在唯一的

线性变换 τ， s.t $\tau(\alpha_i) = \beta_i, i = 1, \cdots, n.$

线性变换存在定理的发现

线性变换是线性代数研究的主要内容！

人们自然希望：线性变换能够用矩阵来表示

线性变换存在定理的发现

线性变换的核心思想：

$$L(V_n(F)) \overset{\varphi}{\cong} F^{n\times n}$$

线性变换存在定理的发现

解决的关键：找到双射 φ

$$L(V_n(F)) \to F^{n\times n}$$

$$\varphi\text{:}\quad \tau \to A =: [\gamma_1, \cdots, \gamma_n]$$

线性变换存在定理的发现

寻找唯一线性变换 τ 使其把V的基

$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 的像在这个基下的坐标分别为

$\gamma_1, \cdots, \gamma_n$. 即 $\tau(\alpha_i) = \beta_i, i = 1, \cdots, n,$

β_i 的坐标是γ_i. 坐标是唯一的.

唯一线性变换 τ 可定义如下：

$$\forall \alpha \in V, \quad \alpha = x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n,$$

$$\tau(\alpha) = x_1\tau(\alpha_1) + \cdots + x_n\tau(\alpha_n)$$

$$= x_1\beta_1 + \cdots + x_n\beta_n$$

总结

矩阵秩之诠释

线性方程组新解法

矩阵对角化系列知识产生过程

线性变换存在定理的发现

培养创新能力的

有效途径：

引领学生开脑洞重新发现课本知识！

UMSS

大学数学科学丛书 — 30

线性代数核心思想及应用

王卿文 编著

科学出版社

(O-4694.31)

- 站在学术前沿研究经典内容
- 深层剖析线性代数理论难点
- 重点突显线性代数核心思想
- 详尽展示线性代数核心技术
- 充分体现与其他学科的联系
- 精设丰富的典型例题与习题

科学出版中心 数理分社
电 话：(010) 64033664
E-mail：math-phy@mail.sciencep.com
网 站：http：//www.math-phy.cn
销售分类建议：高等数学

www.sciencep.com

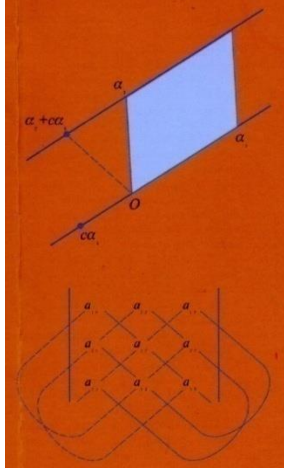
ISBN 978-7-03-033831-0

定 价：79.00 元

自主创新
方法先行

线性代数

上海大学数学系　编



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

自主创新
方法先行

线性代数学习指导

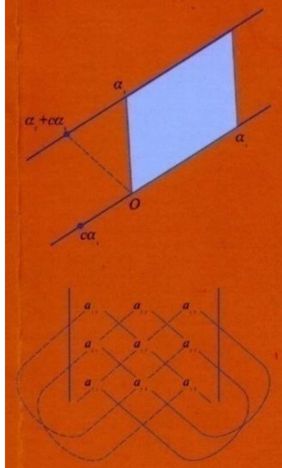
上海大学数学系　编

高等教育出版社

自主创新
方法先行

线性代数

上海大学数学系 编



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

自主创新
方法先行

线性代数学习指导

上海大学数学系 编

高等教育出版社

THANK YOU